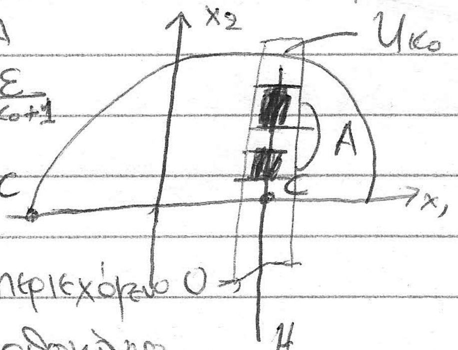
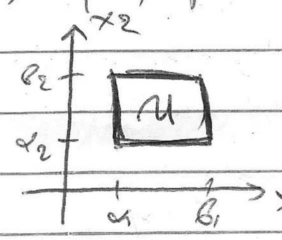
22/03/16 Είδαμε ότι υπερεπίπεδα της μορφής $H=\{\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=c\}$ ~~έχουν~~ έχουν (διδιάστατο) μέτρο 0 και βλέπουμε ότι αν $A\subset H$ φραγμένο με $\|\bar{x}\|<c$, $\forall \bar{x}\in A$ ισχύει $A\subset U_{k_0}$ για $k_0\geq c$ με $V(U_{k_0})=\frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$ όπου $U_k=[-k,k]\times\dots\times[-k,k]\times[c-\frac{\varepsilon}{\dots}, c+\frac{\varepsilon}{\dots}]\times[-k,k]\times\dots\times[-k,k]$



δηλ. για A φραγμένα, $A\subset H$ το A έχει περιεχόμενο 0

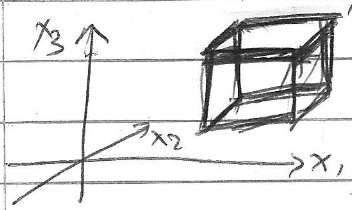
$\Rightarrow$ Αν έχω ένα n-διάστατο κλειστό ορθογώνιο $U=[\alpha_1,b_1]\times\dots\times[\alpha_n,b_n]$, τότε το <u>σύνορό του ∂U</u> έχει (n-διάστατο) μηδενικό περιεχόμενο (ως πεπερασμένη ένωση φραγμένων υποσυνόλων υπερεπιπέδων της μορφής H).

π.χ. Το σύνορο του $U = [\alpha, b] \subset \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\partial U = \{\alpha, b\} \subset \mathbb{R}$ με (μονοδιάστατο) περιεχόμενο (δηλ. μήκος) 0 (ενώ το $v(U) = b-\alpha$)



Το σύνορο του $U=[\alpha_1,b_1]\times[\alpha_2,b_2]$ δηλ. $\partial U = [\alpha_1,b_1]\times\{\alpha_2\}\cup[\alpha_1,b_1]\times\{b_2\}\cup$
$\cup\{\alpha_1\}\times[\alpha_2,b_2]\cup\{b_1\}\times[\alpha_2,b_2]$
έχει (διδιάστατο) περιεχόμενο μηδέν (δηλ. αφού διδιάστατο, έχει εμβαδόν 0) (ενώ $v(U)=(b_1-\alpha_1)(b_2-\alpha_2)>0$, αν $b_1>\alpha_1$, $b_2>\alpha_2$)

Το σύνορο ενός κλειστού «ορθογωνίου» στον $\mathbb{R}^3$, $U=[\alpha_1,b_1]\times[\alpha_2,b_2]\times[\alpha_3,b_3]$ δηλ. το ∂U έχει (τριδιάστατο) περιεχόμενο 0 (δηλ. όγκο 0)



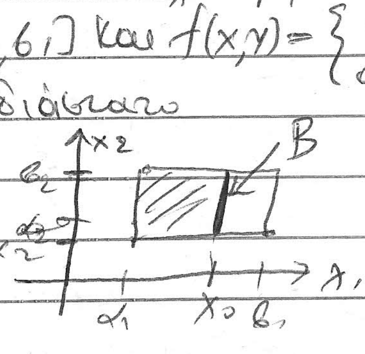
(ενώ $v(U)=(b_1-\alpha_1)(b_2-\alpha_2)(b_3-\alpha_3)>0$)

<u>Κριτήριο Lebesgue</u>: $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολ/μη ⇔ ⇔ f συνεχής σχεδόν παντού ⇔

⇔ $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής σε όλα τα σημεία ενός συνόλου $A\setminus B$ όπου $B=\{\bar{x}\in A : f$ όχι συνεχής στο $\bar{x}\}$ έχει n-διάστατο μηδ. μέτρο.

π.χ. $\boxed{n=1}$ $A=[\alpha,b]\subseteq\mathbb{R}$. Έχουμε ότι η $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μη ⇔ f είναι συνεχής παντού εκτός από σημεία $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ (ακόμη καλύτερα: αν η f έχει <u>πεπερασμένο</u> αριθμό σημείων ασυνέχειας, τότε είναι ολ/μη)

π.χ. $\boxed{n=2}$: $f:[\alpha_1,b_1]\times[\alpha_2,b_2]\to\mathbb{R}$ ολ/μη ⇔ f συνεχής εκτός από σημεία $B\subset[\alpha_1,b_1]\times[\alpha_2,b_2]$ με B να έχει μηδενικό μέτρο.
(π.χ. $B=\{(x_0,y) : \alpha_2\le y\le b_2\}$, $x_0\in[\alpha_1,b_1]$ και $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\le x_0\\ 0, & x>x_0\end{cases}$
τότε $\exists \int_{[\alpha_1,b_1]\times[\alpha_2,b_2]} f(x,y)\,d(x,y)$ αφού B έχει διδιάστατο περιεχόμενο 0.



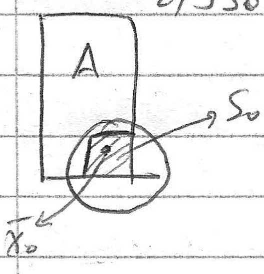
Πόρισμα: $f: A\to\mathbb{R}$ συνεχής, $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο. Τότε
$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη.

Από το Κριτήριο Lebesgue προκύπτουν οι ακόλουθες (πρακτικές) ιδιότητες:

Πρόταση (4.1.7): Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f:A\to\mathbb{R}$ μη αρνητική (δηλ. $f(\bar{x})\geq 0, \forall \bar{x}\in A$) και ολ/μη με $f(\bar{x}_0)>0$ σε ένα σημείο $\bar{x}_0\in A$, όπου είναι συνεχής. Τότε: $\int_A f>0$.

Απόδ: 1) f συνεχής στο $\bar{x}_0$ με $f(\bar{x}_0)>0 \Rightarrow (\exists\delta>0)\ \forall \bar{x}\in A\cap B(\bar{x}_0,\delta)$:
$f(\bar{x}) \geq \frac{f(\bar{x}_0)}{2}>0$

2) $\exists S_0$ κλ. ορθ. με $S_0\subset A\cap B(\bar{x}_0,\delta)$ που περιέχει το $\bar{x}_0$



3) $\forall P\in\mathcal{P}(A)$ με $S_0\in \mathcal{S}_P$ (δηλ. $\forall$ διαμέριση του A που περιέχει το S_0 ως υποορθογώνιο) ισχύει:

$$0 < \underbrace{\inf f|_{S_0}}_{\geq \frac{f(\bar{x}_0)}{2}>0} v(S_0) \leq L(f,P) \leq L_f = \int_A f$$

$f\geq 0 \Rightarrow \inf f\geq 0$

Πρόταση (4.1.8). Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f:A\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και ολ/μη. Τότε $f=0$ σχεδόν παντού $\iff \int_A f=0$

Απόδ: ($\Rightarrow$) Έστω $B\subset A$ το σύνολο των σημείων $\bar{x}\in A$ με $f(\bar{x})\neq 0$. Τότε το B έχει μηδ. (περιεχόμενο) μέτρο. Έστω S οποιοδήποτε υποορθογώνιο οποιασδήποτε διαμέρισης του $A \Rightarrow$ κανένα $S\not\subset B$. Συνεπώς $\inf f|_S=0 \Rightarrow \inf f|_S\cdot v(S)=0 \Rightarrow L(f,P)=0, \forall P \Rightarrow$
$\Rightarrow L_f=0=\int_A f$ (αφού f: ολ/μη)

Πόρισμα: (4.1.5) $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ., $f,g:A\to\mathbb{R}$ ολ/μες. Τότε:
$f=g \iff \int_A |f-g|=0$.

Απόδ: f,g ολ/μες $\Rightarrow f-g$ ολ/μη $\Rightarrow |f-g|$ ολ/μη (και μη αρνητική)
$\iff |f-g|=0$ σχ. παντού $\iff f-g=0$ σχ. παντού $\iff f=g$ σχ. ∎
Πρόταση (4.1.7)

Πόρισμα: (4.1.6) $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. $f,g: A\to\mathbb{R}$ ολ. και $f=g$ σχ. παντού. Τότε: $\Rightarrow$ $(\not\Leftarrow)$ $\int_A f = \int_A g$

Απόδ.: Έχουμε $f=g$ σχ. π. $\to \int_A |f-g| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f-g \le 0 \wedge \int_A g-f \le 0$

$\not\Leftarrow$:

$g(x)=0$

$f(x)=x$

Ασκ: $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ., $f=g$ στο $\operatorname{int} A$ και $f,g:A\to\mathbb{R}$ συνεχείς $\Rightarrow$

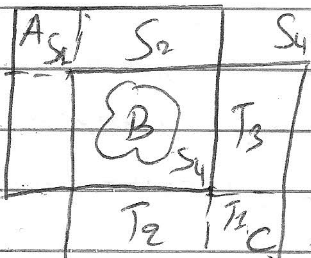
$\Rightarrow \int_A f=\int_A g$ ($f=g$ στο εσωτ. και ∂A μηδενικό μέτρο άρα $\int_A f = \int_A g$).

Ορισμός: (4.1.10): Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$, $B\neq\emptyset$, B: φραγμένο, και $f:B\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη, αν η $f_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$f_B(\bar x)=\begin{cases} f(x), & \bar x\in B\\ 0, & \bar x\notin B\end{cases}$ είναι ολ/μη πάνω από οποιοδήποτε κλ. ορθ. A που περιέχει το B, και τότε:

$$\int_B f \left(=\int_B f(\bar x)\,d\bar x\right) = \int_A f_B|_A \left(=: \int_A f_B\right).$$

Παρατήρηση: Το $\int_B f$ είναι καλά ορισμένο υπό την έννοια ότι είναι ανεξάρτητο από το A.



$S_4 = A\cap C = T_4$

Το $A\cap C$ είναι κλειστό ορθογώνιο. Αν P, Q διαμερίσεις του A και του C αντίστοιχα, οι οποίες έχουν το $A\cap C$ ως υποορθογώνιο, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\int_A f_B &= \overbrace{\int_{S_1} f_B}^{=0} + \overbrace{\int_{S_2} f_B}^{=0} + \overbrace{\int_{S_3} f_B}^{=0} + \overbrace{\int_{A\cap C} f_B}^{=0}\\ \int_C f_B &= \underbrace{\int_{T_1} f_B}_{=0} + \underbrace{\int_{T_2} f_B}_{=0} + \underbrace{\int_{T_3} f_B}_{=0} + \int_{A\cap C} f_B\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\int_A f_B = \int_C f_B}$$

Ερώτημα: Για ποια $B\subset\mathbb{R}^n$ φραγμένα, έχει νόημα ο ορισμός (δηλ. $\exists \int_A f_B \in\mathbb{R}$)

Απάντηση: Θα το δούμε καλύτερα αν πάρουμε $f(\bar{x})=1$ $\forall \bar{x}\in B$. ($f\equiv 1$)

Προσπαθούμε να βρούμε τα $B\subset\mathbb{R}^n$ για τα οποία μπορούμε να υπολ. το $\int_B 1 = \int_A \chi_B =: v(B)$

όπου $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. με $B\subset A$ και $\chi_B(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x}\in B \\ 0, & \bar{x}\notin B \end{cases}$

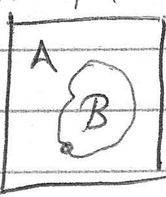
(δηλ) $\chi_B(\bar{x}) = f_B(\bar{x})$, όταν $f(\bar{x})=1$, $\forall \bar{x}\in B$)

χ_B: χαρακτηριστική συνάρτηση του B.

Αυτά τα σύνολα τα λέμε <u>Jordan-μετρήσιμα</u> επειδή $\exists\, v(B)\in\mathbb{R}_0^+$ το οποίο λέμε ότι <u>είναι το περιεχόμενο του B</u>.

Ποια είναι τα Jordan-μετρήσιμα σύνολα B; ($B\subset\mathbb{R}^n$)

<u>Απάντηση</u>: <u>Πρόταση (4.1.9)</u>: Ένα (μη-κενό) φραγμένο $B\subset\mathbb{R}^n$ είναι Jordan-μετρήσιμο αν και μόνο αν το σύνορο $\partial B\subset\mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο



<u>Απόδειξη</u>: Η συνάρτηση $\chi_B|_A(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x}\in B \\ 0, & \bar{x}\notin B \leftrightarrow A\setminus B \end{cases}$ έχει σημεία ασυνέχειας τα σημεία του ∂B.

Από το κριτήριο Lebesgue έχουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int_A \chi_B|_A$ αν-ν το ∂B έχει μηδενικό μέτρο (επειδή ∂B συμπαγές ΠΑΝΤΑ για B: φραγμένο $\Rightarrow$ ∂B μηδενικό περιεχόμενο)